

通信网全端可靠性界的一种计算方法

冯海林, 刘三阳, 宋 月

(西安电子科技大学应用数学系, 陕西西安 710071)

摘 要: 用可靠性多项式计算网络全端可靠性的关键是多项式中系数的计算, 精确计算各系数是一个 NP 难问题^[1]. 本文分析了网络的连通子网数与网络割集以及断集数的关系后, 给出一种网络断集数的计算方法以及网络全端可靠性多项式系数上下界的公式, 适用于任何网络. 最后在网络链路寿命服从指数分布时分析了某 SDH 传输网络的全端可靠性以及界的计算, 以说明本文的方法.

关键词: 通信网; 全端可靠性; 可靠性多项式; 断集

中图分类号: TN915 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2004) 11-1868-03

A Method for Calculating the Bound of All-Terminal Reliability of Communication Network

FENG Hai-lin, LIU San-yang, SONG Yue

(Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: Computing the coefficients is the key to obtain the all-terminal reliability of communication by using reliability polynomial, and computing some coefficients exactly is NP-hard. After studying the relation between connected subnet numbers and the cutset of the network, this paper presents a method for computing the cutset numbers and a formula of the coefficient bounds of reliability polynomial. Finally, when the edge life is exponentially distributed, the paper computes the bounds of all-terminal reliability of a SDH network to demonstrate the method.

Key words: communication networks; all-terminal reliability; reliability polynomial; cutset

1 引言

网络可靠性问题一直以来是网络设计和管理中的重要问题^[3~6], 可靠性是保障网络正常运行的必要条件. 网络的全端可靠性指网络各个端点之间能够保持连通的能力, 该能力可以表述为网络部件在以一定概率发生故障的情况下, 在规定的条件和条件下, 全网保持连通的概率. 尽管对特殊的网络拓扑^[2,3]也能获得其精确的值. 但对任意网络全端可靠性的精确计算是 NP 难问题^[1~3]. 由于精确计算的困难, 对网络全端可靠性的估计成为网络可靠性问题很重要的研究内容. 文献中主要有两大类网络可靠性的估计法, 一类是基于随机模拟的蒙特卡罗法, 它利用随机抽样获得网络的部分状态信息, 然后对网络可靠性作出点估计并给出相应的置信区间. 另一类是通过分析网络可靠性问题的组合结构等给出网络可靠性的绝对上下界^[2]. 如用代数系统计算两端可靠性的界^[3]. 当网络部件发生故障的概率相同时, 全端可靠性是一个关于部件可靠性的多项式, 称为全端可靠性多项式. 利用该多项式计算网络全端可靠性的关键是多项式中系数的计算, 由于大部分系数的精确计算比较困难^[1,2], 因此, 许多研究集中于对系数的近似计算^[1~3]. 本文分析了网络的连通子网数与网络断集的关系后, 给出一种计算全端可靠性多项式系数上下界的公式, 以获得全端可靠性的上下界.

2 网络模型与预备

(1) 将通信网络抽象为无向连通图 $G(V, E)$, 其中 V, E 分别是网络的节点(顶点)集和边(链路)集, 网络有 n 个节点, m 条边, 即 $|V| = n, |E| = m$, 并将图 $G(V, E)$ 简记为 G , 以下也称图 G 为网络 G .

(2) 网络 G 中的节点是可靠的, 网络的拓扑结构是固定不变的.

(3) 网络 G 中的每条边(链路)具有相同的寿命分布, 并设其可靠度函数为 $R(t)$, $t \geq 0$, 且边(链路)的故障是相互独立的.

(4) 网络的全端可靠性记为 $Rel(p)$, 它表示网络中所有节点保持连通的概率. 其中 p 为网络 G 的每条边(链路)在某一时刻 t_0 的可靠度, 即 $p = R(t_0)$.

定义^[7]1 一个无向连通图 G 的割集 S 是 G 的最少边的集合, 除去它将使 G 分割为两个连通子图.

定义^[7]2 称 $E(V_1 \times \bar{V}_1)$ 为图 $G = (V, E)$ 的断集, 其中 $V_1 \subset V, \bar{V}_1 \subset V - V_1$. $E(V_1 \times \bar{V}_1)$ 表示端点分别属于 V_1 和 $\bar{V}_1$ 的所有边的集合.

由图论知识知, 断集或者是割集, 或者是割集的边不重并, 割集是最小的断集, 以下不加区分用 S 表示图 G 的断集或割集.

收稿日期: 2003-06-12; 修回日期: 2004-05-06

基金项目: 陕西省自然科学基金(No. 2002A13); 国家教育部跨世纪优秀人才基金; 陕西省自然科学基金项目

定义^{[7]3} 设 G 是连通图,称数 $\lambda(G) = \min\{|S|; S \text{ 是 } G \text{ 的断集}\}$ 为 G 的边连通度.

定义^{[7]4} 设 v 是图 G 的一个顶点,与 v 关联的所有边的集合,称为顶点 v 的关联集,记作 $g(v)$.

由图论知识,网络 G 的 $n-1$ 个关联集的所有可能的环和构成网络的全部断集.

引理^[7] 对一个图 G ,有 $\lambda(G) \leq \delta(G)$,其中 $\delta(G)$ 是 G 的顶点的最小度数.

3 全端可靠性多项式系数界的计算

在第二节的模型假设下,网络在某时刻 t_0 的全端可靠性可以表示为^[1,2]

$$\text{Re } l(p) = \sum_{i=0}^m N_i p^i (1-p)^{m-i} \quad (1)$$

其中 N_i 是网络 G 的具有 i 条边的连通生成子网络的个数,式(1)是关于边可靠度 p 的多项式,称之为全端可靠性多项式.

显然,网络 G 的具有最少边数的连通子网数就是网络的最小生成树数目,所以当 $i = n-1$ 时, N_{n-1} 为 G 网络的最小生成树数目,可用 Binet-Cauchy 定理或 Kirchhoff 的度矩阵法^[1] 精确计算,当 $i < n-1$ 时,式(1)中 $N_i = 0$. 如果网络 G 的边连通度为 λ ,则当 $i \geq m - \lambda + 1$ 时, $N_i = \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m \\ m-i \end{bmatrix}$, 因此式(1)可以表示为

$$\text{Re } l(p) = N_{n-1} p^{n-1} (1-p)^{m-n+1} + \sum_{i=m-\lambda+1}^m N_i p^i (1-p)^{m-i} \quad (2)$$

式(2)中当 $n \leq i < m - \lambda$ 时,系数 N_i 通常难以精确计算. A. K 界^[1,2]和 R. M 界^[1,2]是分别用 0 和 $\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}$ 代替(2)式中不能精确计算的系数后获得的,它们虽然简单但却很粗略. 为此,本文给出 $N_i (n \leq i \leq m - \lambda)$ 比较好的计算公式,从而获得比较好的全端可靠性界计算方法.

因为 N_i 表示网络 G 的具有 i 条边的连通子网络的数目, R. M 界是以 $\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}$ 代替系数 $N_i (n \leq i \leq m - \lambda)$ 后所得到的界. 事实上, $\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}$ 是从网络 G 的 m 条边中任取 i 条边导出的子网络数目,而每一个这样的子网络,或者是连通的子网络(即包含了最小生成树),或者是不连通的子网络,因此 $N_i (n \leq i \leq m - \lambda)$ 的精确值应该是 $\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}$ 减去不连通的子网络数. 若 G 的 $i (n \leq i \leq m - \lambda)$ 条边导出的子网络是不连通的子网络,则剩余的 $m - i$ 条边中一定包含网络 G 的至少一个割集. 若令 S_j 表示边数为 j 的断集(割集)数目,则当 $n \leq i \leq m - \lambda$ 时,系数 N_i 可计算如下

$$\text{当 } m - i = \lambda \text{ 时, } i = m - \lambda, \text{ 则 } N_i = \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} - S_\lambda \quad (3)$$

事实上,当 $m - i = \lambda$ 时,在网络剩余的 $m - i$ 条边中所包含的割集的边数只能为 λ , $\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}$ 减去边数为 λ 的割集数就

是 N_i 的值,而且是精确值.

当 $m - i = \lambda + k$ 时, $i = m - \lambda - k$, 这里 k 为整数且满足 $1 \leq k \leq m - n - \lambda$.

$$\text{如果 } k \leq \lambda - 1, \text{ 则 } m - i = \lambda + k \leq 2\lambda - 1, \text{ 则} \\ N_i = \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} - S_{\lambda+k} - S_{\lambda+k-1} \begin{bmatrix} i+1 \\ 1 \end{bmatrix} - \dots - S_\lambda \begin{bmatrix} i+k \\ k \end{bmatrix} \quad (4)$$

事实上,这时在网络剩余的 $m - i = \lambda + k$ 条边中只可能含有网络的割集而不是断集,所以, $\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}$ 减去由边数分别为 $\lambda + k, \lambda + k - 1, \dots, \lambda$ 的割集与其他边的组合数目的乘积,就是 N_i 的值,也为精确值.

如果 $k > \lambda - 1$ 时,则 $m - i = \lambda + k > 2\lambda - 1$, 则在网络剩余的 $m - i = \lambda + k$ 条边中可能包含割集也可能包含断集,且断集(割集)的边数可能有 $\lambda + k, \lambda + k - 1, \dots, \lambda$. 此时 N_i 的精确值难以计算,所以 $\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}$ 减去边数分别为 $\lambda + k, \lambda + k - 1, \dots, \lambda$ 的断集数与其他边的组合数的积得到的值是系数 N_i 的下界 N_{Li} , 即

$$N_i \geq N_{Li} = \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} - S_{\lambda+k} - S_{\lambda+k-1} \begin{bmatrix} m-\lambda-k+1 \\ 1 \end{bmatrix} - \dots - S_\lambda \begin{bmatrix} m-\lambda \\ k \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} - S_{\lambda+k} - S_{\lambda+k-1} \begin{bmatrix} i+1 \\ 1 \end{bmatrix} - \dots - S_\lambda \begin{bmatrix} i+k \\ k \end{bmatrix} \quad (5)$$

如果用 $\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}$ 减去边数分别为 $2\lambda - 1, 2\lambda - 2, \dots, \lambda$ 的割集数与其他边的组合数的积,而对形如 $S_{\lambda+x} \begin{bmatrix} m-\lambda-x \\ k-x \end{bmatrix}$ 与 $S_{k-x} \begin{bmatrix} m-k+x \\ \lambda+x \end{bmatrix}$ 的被减数只取其中一个 ($x = 1, 2, \dots, \lambda - 1$), 则避免了重复情况,因此可获得 N_i 的上界 N_{Ui} , 一般写为下式

$$N_i \leq N_{Ui} = \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} - S_\lambda \begin{bmatrix} m-\lambda \\ k \end{bmatrix} - S_{\lambda+1} \begin{bmatrix} m-\lambda-1 \\ k-1 \end{bmatrix} - \dots \\ - S_{\lambda+(\lambda-1)} \begin{bmatrix} m-2\lambda+1 \\ k-\lambda+1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

4 网络断集数的计算

在网络规模较大的时候,由引理,可取 $\lambda(G) = \delta(G)$ 作为边的连通度. 在(3)~(6)中,需要计算边数为 j 的断集(割集)数 $S_j (j = \lambda, \lambda + 1, \dots, \max(2\lambda - 1, \lambda + k))$, 所以将网络 G 的关联集表示为元素为 0 和 1 的行向量形式,即

$g(v) = (g_1, g_2, \dots, g_m)$, 若边 e_i 与顶点 v 关联, $g_i = 1$, 否则 $g_i = 0 (i = 1, 2, \dots, m)$.

由于网络 G 的关联集就是网络的割集,因此用上述形式表示关联集后,对每一个联集中的元素相加所得和就是该关联集的边数,也就是该关联集所表示的割集的边数.

令 $Q = (g(v_1), g(v_2), \dots, g(v_{n-1}))$ 它是一个 $(n-1) \times m$ 矩阵. 在数 0 和数 1 之间定义运算 $\odot$, 即 0 与 1 的环和运算: $0 \odot 0 = 0, 0 \odot 1 = 1, 1 \odot 0 = 1, 1 \odot 1 = 0$

则关联集的环和运算就可以用其行向量之间的运算 $\odot$ 表示, 即对两个行向量作运算 $\odot$ 后, 所得行向量为某断集或割集的行向量形式, 且其元素和即为该断集或割集的边数. 因此对矩阵 Q 作如下运算便可得 $S_j (j = \lambda, \dots, \max(2\lambda - 1, \lambda + k))$.

(1) 选 Q 的每一行, 将每一行元素相加, 若和值小于 $\lambda + k$, 则用 S_j 记录和为 j 的次数 ($j = \lambda, \lambda + 1, \dots, \max(2\lambda - 1, \lambda + k)$).

(2) 选 Q 的每两行, 将对应元素作运算 $\odot$, 再将所得行的元素相加, 更新 S_j .

(3) 选 Q 的每三行, 将对应元素作运算 $\odot$, 再将所得行的元素相加, 更新 $S_j, \dots$.

(4) 选 Q 的每 $n - 1$ 行, 将 $n - 1$ 对应元素作运算 $\odot$, 再将所得行的元素相加, 更新 S_j .

最后所得到的 S_j 就是边数为 j 断集(割集)的数目.

5 SDH网络分析

考虑某城市的一个 SDH 传输网络, 如图 1 所示. 并假设每条链路的寿命服从负指数分布,

即每条边的可靠度函数为 $R(t) = e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0, t \geq 0$, 其中参数 α 为边

(传输链路)的故障率, 以光缆线路为标准, 综合考虑光缆的设计寿命(一般为 25 年左右)以及该地域光缆投入使用后异常中断的次数(单位: 次/年), 得出光缆的平均故障

间隔时间(MTBF)为 6.5 年, 因此, 取链路故障率 $\alpha = 1/\text{MTBF} = 0.15$ 作为参考值. 对所考虑的 SDH 传输网络, $m = 9, n = 7$, 本文取 $\lambda = 1$ 为顶点的最小度数. 用 Kirchhoff 的度矩阵法易算得最小生成树数目, 在网络规模大的时候, 最

小生成树的数目也可近似计算, 为说明计算方法, 本例均采用近似计算. 所以 $k = m - n + 1 - \lambda = 2, \max(2\lambda - 1, \lambda + k) = 3$, 故只需要求边数为 1, 2 和 3 的断集数即可. 取 SDH 传输网络的 5 个关联集为 $g(v_1) = \{e_1, e_2, e_8\}, g(v_2) = \{e_5, e_6\}, g(v_3) = \{e_4, e_5\}, g(v_4) = \{e_1, e_7\}, g(v_5) = \{e_3, e_4, e_6, e_7, e_8, e_9\}$. 将每一个关联集都表示为元素为 0 和 1 的行向量形式: $g(v_1) = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0), g(v_2) = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0), g(v_3) = (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0), g(v_4) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), g(v_5) = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1)$. 以关联集为行构成矩阵 Q

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

对该矩阵进行上节所述的操作(1~4), 则得到 SDH 网络的边数为 1, 2, 3 的断集数为 $S_1 = 1, S_2 = 4, S_3 = 9$. 则由公式(2)~(6)得各系数界值以及可靠性界:

$$N_{L6} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} - S_3 - S_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} - S_1 \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = 19,$$

$$\begin{aligned} N_{L7} &= \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 9 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} - S_2 - S_1 \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 9 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} = 24, N_{L8} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix} - S_1 = 8, \\ N_{L9} &= \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} = 1, N_{U6} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} - S_1 \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = 56, \\ N_{U7} &= \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} - S_1 \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = 28, N_{U8} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix} - S_1 = 8, N_{U9} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix} = 1, \end{aligned}$$

可计算 SDH 传输网络全端可靠性的上下界分别为:

$$\begin{aligned} \text{Re } I_u &= 56 R(t)^6 (1 - R(t))^3 + 28 R(t)^7 (1 - R(t))^2 \\ &\quad + 8 R(t)^8 (1 - R(t)) + R(t)^9 \\ \text{Re } I_l &= 19 R(t)^6 (1 - R(t))^3 + 24 R(t)^7 (1 - R(t))^2 \\ &\quad + 8 R(t)^8 (1 - R(t)) + R(t)^9 \end{aligned}$$

将 $R(t) = e^{-\alpha t}$, $\alpha = 0.15$ 代入上式, 得 SDH 网络全端可靠性的界在各个时刻的值(如图 2 所示).

6 结论

通信网络的全端可靠性是网络设计时首先要考虑的性能之一, 本文给出一种计算全端可靠性界的方法, 实现简单, 可用于对任何网络的实时评估.

参考文献:

- [1] Charles J Colbourn. The Combinatorics of Network Reliability[M]. New York, Oxford: Oxford University Press, 1987. 47 - 53.
- [2] M O Ball, T L Magnanti, C L Monma, G L Nemhauser. Hand Books in Operations Research and Management Science, Network Models[M]. Amsterdam, Lausanne, New York: ELSEVIER, 1995. 679 - 701.
- [3] Douglas R Shier. Network Reliability and Algebraic Structures[M]. New York: Clarendon Press, 1991. 41 - 50.
- [4] Steen J Hsu, Yu G Chen, Maria C Yuang. Terminal-pair reliability in ATM virtual path networks[J]. an International Journal Computers & Mathematics with Applications, 2000, (40): 885 - 895.
- [5] Kent Fitzgerald, Shahram Latifi, Pradip K Srimani. Reliability modeling and assessment of the star-graph networks[J]. IEEE Trans on Reliability, 2000, 51(1): 49 - 57.
- [6] 周连红, 伍翔, 等. 一种光纤通信系统可用性的算法及分析[J]. 电子学报, 2001, 29(12): 1713 - 1716.
- [7] 肖位枢. 图论及其算法[M]. 北京: 航空工业出版社, 1993. 82 - 88.

作者简介:



冯海林 女, 1966 年出生于陕西米脂, 西安电子科技大学应用数学系副教授, 博士研究生, 主要从事系统可靠性与网络优化等方面的研究.

刘三阳 1959 年出生于陕西临潼, 西安电子科技大学应用数学系教授, 博士, 博士生导师, 主要从事优化理论与应用, 网络优化算法, 路由算法等方面的研究.

宋 月 1969 年出生于江苏武进, 西安电子科技大学应用数学系博士研究生, 主要从事网络可靠性与网络优化算法等方面的研究.